

p -調和関数と Tug-of-War ゲーム

竹内 博

Notes on p -harmonic Functions and Tug-of-War Games

Hiroshi TAKEUCHI

ABSTRACT

In this note we will discuss the p -harmonic functions and tug-of-war games.

KEYWORDS: p -harmonic functions, tug-of-war games

1 p -harmonious function

次の等式を満たす \mathbf{R}^n 上の関数 u_ϵ を考える。
また $1 < p \leq \infty$ とする。

$$u_\epsilon(x) = \frac{\alpha}{2} \left\{ \sup_{\overline{B}_\epsilon(x)} u_\epsilon + \inf_{\overline{B}_\epsilon(x)} u_\epsilon \right\} + \frac{\beta}{|B_\epsilon|} \int_{B_\epsilon(x)} u_\epsilon(y) dy \quad (1)$$

ここで $\epsilon > 0$ であり, α, β は $\alpha + \beta = 1$, かつ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{(p-2)}{(n+2)}$ を満たす。よって

$$\alpha = \frac{p-2}{p+n}, \quad \beta = \frac{2+n}{p+n} \quad (2)$$

となり $\alpha = 0, \beta = 1$ は $p = 2$ に相当し, $\alpha = 1, \beta = 0$ は $p = \infty$ に相当する。 $2 \leq p \leq \infty$ は $0 \leq \alpha \leq 1$ に相当し, $1 < p \leq 2$ は $-1/(n+1) < \alpha \leq 0$ に相当する。セクション 1, 2 では $\alpha \geq 0$ を考える。またここで, $B_\epsilon(x)$ は \mathbf{R}^n 内の中心 x , 半径 $\epsilon > 0$ の開ユークリッド球で, その閉包

$$\overline{B}_\epsilon(x) = \{y \in \mathbf{R}^n : |y-x| \leq \epsilon\}$$

を表し, $|B_\epsilon|$ は B_ϵ の体積を表す。この関数 u_ϵ を p -harmonious function と呼ぶ。ある開集合 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 内で以下の 2 人ゼロ和ゲームを考える。まず $\Gamma_\epsilon = \{x \in \mathbf{R}^n \setminus \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) \leq \epsilon\} \subset \Omega$ に対して $F: \Gamma_\epsilon \rightarrow \mathbf{R}$ を利得関数として与えておく。一人をプレイヤー 1, 他の一人をプレイヤー 2 とする。初期状態 $x_0 \in \Omega$ を出発して, 確率 α で, コインの表が出たとする, このときさらに公平なコインを投げ, 勝者は目的の場所 $x_1 \in \overline{B}_\epsilon(x_0)$ に移動する。もし最初のコインが裏ならば (確率 β), 一樣の確率で $\overline{B}_\epsilon(x_0)$ 内の任意の点 x_1 に移動する。 x_1 から同様にこの操作を続け, 端点 Γ_ϵ に達するまでゲームを続ける。その結果 x_0, x_1, \dots を得る。 x_k は確率変数となる。

ゲームは最初に $x_\tau \in \Gamma_\epsilon$ に到達したとき終了する。ここで τ は停止時刻を表す。プレイヤー 1 は戦略 S_1 をとり, 利得は $F(x_\tau)$ である。プレイヤー 1 はそれを最大化しようとし, プレイヤー 2 は戦略 S_2 をとり利得を最小化しようとするゼロ和ゲームである。ステップ k までのゲームの歴史は $k+1$ ゲームまでのベクトル, (x_0, x_1, \dots, x_k) となる。このステップ k までのすべての歴史の集合を H_k と書く。それは長さ k の可能な状態を含む。すべての有限の歴史の集合を次で表す。

$$H = \bigcup_{k=0}^{\infty} H_k$$

2012年12月21日受付, 2013年3月6日最終受付
竹内 博 四国大学経営情報学部
Hiroshi TAKEUCHI, Member (Faculty of Management and Information Science, Shikoku Univ., Tokushima, 771-1192 Japan).
四国大学経営情報研究所年報 No. 18 pp.29-37 2013年2月

プレイヤー 1 の戦略 S_1 はプレイヤー 1 がコインを投げ勝った時、次の位置を与える H 上の関数

$$S_1(x_0, x_1, \dots, x_k) = x_{k+1} \in \overline{B}_\epsilon(x_k)$$

となり、歴史を与える。プレイヤー 2 に対しても同様に戦略 S_2 を与える。

$\Omega_\epsilon = \Omega \cup \Gamma_\epsilon \subset \mathbf{R}^n$ として

$$H^\infty = \Omega_\epsilon \times \Omega_\epsilon \times \dots,$$

$\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots) \in H^\infty$ に対して $x_k(\omega) = \omega_k$ とする。 $\tau(\omega) = \inf\{k : x_k(\omega) \in \Gamma_\epsilon, k = 0, 1, 2, \dots\}$ は停止時刻を表す。 x_0 から出発し、戦略 S_1, S_2 を使った期待利得は

$$\mathbb{E}_{S_1, S_2}^{x_0}[F(x_\tau)] = \int_{H^\infty} F(x_\tau(\omega)) dP_{S_1, S_2}^{x_0}(\omega).$$

ここで \mathbb{E} は期待値を表す。プレイヤー 1 のゲームの値は

$$u_1^\epsilon(x_0) = \sup_{S_1} \inf_{S_2} \mathbb{E}_{S_1, S_2}^{x_0}[F(x_\tau)]$$

プレイヤー 2 のゲームの値は

$$u_2^\epsilon(x_0) = \inf_{S_2} \sup_{S_1} \mathbb{E}_{S_1, S_2}^{x_0}[F(x_\tau)]$$

ここで動的計画法を使うことにより、次が言える。

定理 1: プレイヤー 1 のゲームの値 $u_1^\epsilon(x_0)$ は次式を満たす。

$$u_1^\epsilon(x_0) = \frac{\alpha}{2} \left\{ \sup_{\overline{B}_\epsilon(x_0)} u_1^\epsilon + \inf_{\overline{B}_\epsilon(x_0)} u_1^\epsilon \right\} + \frac{\beta}{|B_\epsilon|} \int_{B_\epsilon(x_0)} u_1^\epsilon(y) dy \quad (3)$$

またプレイヤー 2 についても同様の式を満たす。

さらに次が言える。

定理 2: $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ を有界開集合とし、 F を Γ_ϵ で与えられた値をもつとする。この時 $u_1^\epsilon = u_2^\epsilon$ が成り立つ。この式が成り立つ時ゲームは値をもつ

いう。

証明: 定義から明らかに $u_1^\epsilon \leq u_2^\epsilon$ が成立する。 $u_2^\epsilon \leq u_1^\epsilon$ を示す。プレイヤー 2 は x_{k-1} で u_1^ϵ を最小化しようとする点 x_k 、をとる戦略 S_2^0 をとる。すなわち固定した $\eta > 0$ に対して、

$$u_1^\epsilon(x_k) \leq \inf_{\overline{B}_\epsilon(x_{k-1})} u_1^\epsilon + \eta 2^{-k},$$

点 x_0 から出発する。 u_1^ϵ の戦略と動的計画法により

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{S_1^0, S_2^0}^{x_0} [u_1^\epsilon(x_k) + \eta 2^{-k} | x_0, \dots, x_{k-1}] \\ & \leq \frac{\alpha}{2} \left\{ \sup_{\overline{B}_\epsilon(x_{k-1})} u_1^\epsilon + \inf_{\overline{B}_\epsilon(x_{k-1})} u_1^\epsilon + \eta 2^{-k} \right\} \\ & \quad + \frac{\beta}{|B_\epsilon(x_{k-1})|} \int_{B_\epsilon(x_{k-1})} u_1^\epsilon dy + \eta 2^{-k} \\ & = u_1^\epsilon(x_{k-1}) + \eta 2^{-(k-1)} \end{aligned} \quad (4)$$

よって

$$M_k = u_1^\epsilon(x_k) + \eta 2^{-k}$$

は優マルチンゲール (supermartingale) となる。さらに Fatou の補題と任意停止定理 (optional stopping theorem) より

$$\begin{aligned} u_2^\epsilon(x_0) &= \inf_{S_2} \sup_{S_1} \mathbb{E}_{S_1, S_2}^{x_0}[F(x_\tau)] \\ &\leq \sup_{S_1} \mathbb{E}_{S_1, S_2^0}^{x_0}[F(x_\tau) + \eta 2^{-\tau}] \\ &\leq \sup_{S_1} \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{S_1, S_2^0}^{x_0}[u_1^\epsilon(x_{\tau \wedge k}) + \eta 2^{-(\tau \wedge k)}] \\ &\leq \sup_{S_1} \mathbb{E}_{S_1, S_2^0}^{x_0}[u_1^\epsilon(x_0) + \eta] = u_1^\epsilon(x_0) + \eta. \end{aligned} \quad (5)$$

ここで $\tau \wedge k = \min(\tau, k)$ であり $\eta > 0$ は任意なので目的の式を得る。

2 $\epsilon \rightarrow 0$ のときの収束

この節で p -harmonious function は $\epsilon \rightarrow 0$ のときに p -harmonic function に収束することを示す。

定義 1 : u が p -harmonic function であるとは $\epsilon \rightarrow 0$ で $x \in \bar{\Omega}$ に対し

$$u(x) = \frac{\alpha}{2} \left\{ \sup_{\bar{B}_\epsilon(x)} u + \inf_{\bar{B}_\epsilon(x)} u \right\} + \frac{\beta}{|B_\epsilon|} \int_{B_\epsilon(x)} u(y) dy + O(\epsilon^3) \quad (6)$$

が成り立つことを言う。

定理 3 : u を開集合 $\Omega \cup \Gamma_\epsilon \subset \Omega'$ 上の p -harmonic function とする。また $Du \neq 0$ を仮定する。 u_ϵ を Γ_ϵ で u に等しい p -harmonious function とする。このとき $\epsilon \rightarrow 0$ で u_ϵ は u に $\bar{\Omega}$ で一様に u に収束する。

証明 : 当面 $p > 2$ すなわち $\alpha > 0$ となる場合を考える。プレイヤー 2 は x_{k-1} の点で、 u を最小化するように x_k をとるように戦略 S_2^0 をとり、 $x_k \in B_\epsilon(x_{k-1})$ を選ぶ。よって

$$u(x_k) = \inf_{\bar{B}_\epsilon(x_{k-1})} u(y).$$

次に $C_1 > 0$ を $|O(\epsilon^3)| \leq C_1 \epsilon^3$ となるようにとる。戦略 S_2^0 により

$$M_k = u(x_k) - C_1 k \epsilon^3$$

は優マルチンゲールになる。実際

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{S_1, S_2^0} [u(x_k) - C_1 k \epsilon^3 | x_0, \dots, x_{k-1}] \\ & \leq \frac{\alpha}{2} \left\{ \sup_{\bar{B}_\epsilon(x_{k-1})} u + \inf_{\bar{B}_\epsilon(x_{k-1})} u \right\} \\ & \quad + \frac{\beta}{|B_\epsilon(x_{k-1})|} \int_{B_\epsilon(x_{k-1})} u dy - C_1 k \epsilon^3 \\ & \leq u(x_{k-1}) - C_1 (k-1) \epsilon^3. \end{aligned} \quad (7)$$

ここで最初の不等号は戦略の選択からきて、2 番目の不等号は定義 1 から来る。次に Fatou の補題と優マルチンゲールに対する任意停止定理を使って u_ϵ^2 を評価する。

$$\begin{aligned} u_\epsilon^\epsilon(x_0) &= \inf_{S_2} \sup_{S_1} \mathbb{E}_{S_1, S_2}^{x_0} [F(x_\tau)] \\ &\leq \sup_{S_1} \mathbb{E}_{S_1, S_2^0}^{x_0} [u(x_\tau)] \\ &\leq \sup_{S_1} \mathbb{E}_{S_1, S_2^0}^{x_0} [u(x_\tau) + C_1 \tau \epsilon^3 - C_1 \tau \epsilon^3] \\ &\leq \sup_{S_1} \left(\liminf_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{S_1, S_2^0}^{x_0} [u(x_{\tau \wedge k})] \right. \\ &\quad \left. - C_1 (\tau \wedge k) \epsilon^3 \right) + C_1 \epsilon^3 \mathbb{E}_{S_1, S_2^0}^{x_0} [\tau] \\ &\leq u(x_0) + C_1 \epsilon^3 \sup_{S_1} \mathbb{E}_{S_1, S_2^0}^{x_0} [\tau]. \end{aligned} \quad (8)$$

この不等式とプレイヤー 1 に対する同様の式より $u_\epsilon = u_\epsilon^2 = u_1^\epsilon$ に対して

$$\begin{aligned} u(x_0) - C_1 \epsilon^3 \inf_{S_2} \mathbb{E}_{S_1^0, S_2}^{x_0} [\tau] \\ \leq u_\epsilon(x_0) \leq u(x_0) + C_1 \epsilon^3 \sup_{S_1} \mathbb{E}_{S_1, S_2^0}^{x_0} [\tau]. \end{aligned}$$

$\epsilon \rightarrow 0$ にして、もし次が言えれば証明は終わる。

$$\mathbb{E}_{S_1, S_2^0}^{x_0} [\tau] \leq C \epsilon^{-2}$$

これを示すために

$$\bar{M}_k = -u(x_k)^2 + u(x_0)^2 + C_2 \epsilon^2 k$$

が十分小さな ϵ に対して優マルチンゲールであることを示す。

もしプレイヤー 2 がコインを投げて勝った時、 $Du \neq 0$ より、 $C_3 = \inf_{x \in \Omega} |Du|$ として

$$u(x_k) - u(x_{k-1}) \leq -C_3 \epsilon$$

を得る。よって

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{S_1, S_2^0} [((u(x_k) - u(x_{k-1})))^2 | x_0, \dots, x_{k-1}] \\ & \geq \frac{\alpha}{2} ((-C_3 \epsilon)^2 + 0) + \beta \cdot 0 = \frac{\alpha C_3^2}{2} \epsilon^2. \end{aligned} \quad (9)$$

さらに

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{S_1, S_2^0} [\tilde{M}_k - \tilde{M}_{k-1} | x_0, \dots, x_{k-1}] \\ = & \mathbb{E}_{S_1, S_2^0} [-u(x_k)^2 + u(x_{k-1})^2 + C_2 \epsilon^2 | x_0, \dots, x_{k-1}] \\ = & \mathbb{E}_{S_1, S_2^0} [-(u(x_k) - u(x_{k-1}))^2 | x_0, \dots, x_{k-1}] \\ & - \mathbb{E}_{S_1, S_2^0} [2(u(x_k) - u(x_{k-1}))u(x_{k-1}) | x_0, \dots, x_{k-1}] \\ & + C_2 \epsilon^2. \end{aligned} \tag{10}$$

必要ならば定数をひいて $u < 0$ を仮定する。さらに $u(x_{k-1})$ は x_{k-1} の点で決まり、右辺の第2項は次式で評価される。

$$\begin{aligned} & -\mathbb{E}_{S_1, S_2^0} [2(u(x_k) - u(x_{k-1}))u(x_{k-1}) | x_0, \dots, x_{k-1}] \\ & = -2u(x_{k-1}) (\mathbb{E}_{S_1, S_2^0} [u(x_k) | x_0, \dots, x_{k-1}] \\ & \quad - u(x_{k-1})) \\ & \leq 2\|u\|_\infty C_1 \epsilon^3. \end{aligned} \tag{11}$$

最後の不等式は前と同様にして得られる。(9), (10) 式から

$$-\epsilon^2 \alpha C_3^2 / 2 + 2\|u\|_\infty C_1 \epsilon^3 + C_2 \epsilon^2 \leq 0.$$

のときに

$$\mathbb{E}_{S_1, S_2^0} [\tilde{M}_k - \tilde{M}_{k-1} | x_0, \dots, x_{k-1}] \leq 0$$

を得る。上の式は例えば C_2 を $C_3 \geq 2\sqrt{C_2/\alpha}$, $\epsilon < C_2/(2\|u\|_\infty C_1)$ ととる。よって \tilde{M}_k が優マルチンゲールになることが示された。優マルチンゲールに対する任意停止定理より

$$\mathbb{E}_{S_1, S_2^0}^{x_0} [\tilde{M}_{\tau \wedge k}] \leq \tilde{M}_0 = 0$$

よって

$$C_2 \epsilon^2 \mathbb{E}_{S_1, S_2^0}^{x_0} [\tau \wedge k] \leq \mathbb{E}_{S_1, S_2^0}^{x_0} [u(x_{\tau \wedge k})^2 - u(x_0)^2]. \tag{12}$$

u は Ω 内で有界で k の極限をとって示される。

3 p -harmonic function の同値性

ある開集合 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 上の有界関数 u に対し p -Laplacian Δ_p ($1 < p < \infty$) は

$$\begin{aligned} \Delta_p u & = \operatorname{div} (|Du|^{p-2} Du) \\ & = |Du|^{p-2} \Delta u + \langle D(|Du|^{p-2}), Du \rangle \end{aligned} \tag{13}$$

と定義する。ここで $\Delta u = \operatorname{div} (Du)$ は普通のラプラシアンを表す。 $\Delta_\infty u = \langle D^2 u, Du \rangle, Du \rangle = \langle \frac{1}{2} D(|Du|^2), Du \rangle = \sum_{i,j} u_{x_i} u_{x_j} u_{x_i x_j}$ とおくと

$$\Delta_p u = |Du|^{p-2} \{\Delta u + (p-2)|Du|^{-2} \Delta_\infty u\} \tag{14}$$

となる。ここでは u が p -harmonic function (調和関数) (粘性解の意味で) と $\Delta_p u = 0$ は粘性解の意味で同値になることを示す。形式的に $(p-2)|Du|^{p-4}$ で割ると

$$\Delta_\infty u + \frac{|Du|^2 \Delta u}{(p-2)} = 0 \tag{15}$$

$|Du|^2, |\Delta u| < \infty$ とし、 $p \rightarrow \infty$ とすると $\Delta_\infty u = 0$ 。この方程式を満たす u を無限(∞)-調和関数という。

定義2：連続関数 u が粘性解の意味で次の式を満たすとは $\epsilon \rightarrow 0$ で

$$\begin{aligned} u(x) & = \frac{\alpha}{2} \left\{ \sup_{\overline{B_\epsilon(x)}} u + \inf_{\overline{B_\epsilon(x)}} u \right\} \\ & \quad + \frac{\beta}{|B_\epsilon|} \int_{B_\epsilon(x)} u(y) dy + O(\epsilon^3) \end{aligned} \tag{16}$$

もし

(1) $\nabla u \neq 0$ かつ $u(x) = \phi(x)$ をもつ点 $x \in \Omega$ で $u - \phi$ が真に最小を持つすべての $\phi \in C^2$ に対して

$$\begin{aligned} 0 & \geq -\phi(x) + \frac{\alpha}{2} \left\{ \sup_{\overline{B_\epsilon(x)}} u + \inf_{\overline{B_\epsilon(x)}} u \right\} \\ & \quad + \frac{\beta}{|B_\epsilon|} \int_{B_\epsilon(x)} u(y) dy + O(\epsilon^3) \end{aligned} \tag{17}$$

(2) $\nabla u \neq 0$ かつ $u(x) = \phi(x)$ をもつ点 $x \in \Omega$ で $u - \phi$ が真に最大を持つすべての $\phi \in C^2$ に対して

$$0 \leq -\phi(x) + \frac{\alpha}{2} \left\{ \sup_{B_\epsilon(x)} u + \inf_{B_\epsilon(x)} u \right\} + \frac{\beta}{|B_\epsilon|} \int_{B_\epsilon(x)} u(y) dy + O(\epsilon^3) \quad (18)$$

定義 3 : $1 < p < \infty$ に対し, $-\Delta_p u = 0$ を考える。

(1) 下半連続な関数 u が粘性優解であるとは, $\nabla u \neq 0$ をもつ点 $x \in \Omega$ で $u - \phi$ が真に最小を持つすべての $\phi \in C^2$ に対して

$$-(p-2)\Delta_\infty \phi(x) - \Delta \phi(x) \geq 0$$

(2) 上半連続な関数 u が粘性劣解であるとは, $\nabla u \neq 0$ をもつ点 $x \in \Omega$ で $u - \phi$ が真に最大を持つすべての $\phi \in C^2$ に対して

$$-(p-2)\Delta_\infty \phi(x) - \Delta \phi(x) \leq 0$$

(3) u が粘性解であるとは粘性優解かつ粘性劣解であるとき。

定理 4 : $1 < p \leq \infty$ とする。 u を連続関数として定義 2 の粘性解と定義 3 の粘性解は同値になる。証明の前に直観的考察を行う。 u を滑らかな関数で $\nabla u \neq 0$ とする。(14)式から $\Delta u + (p-2)|Du|^{-2}\Delta_\infty u = 0$ と $\Delta_p u = 0$ が同値である。テイラー展開は

$$u(y) = u(x) + \nabla u(x) \cdot (y-x) + \frac{1}{2} \langle D^2 u(x)(y-x), (y-x) \rangle + O(|y-x|^3)$$

これを $B_\epsilon(x)$ 上で積分して

$$\int_{B_\epsilon(x)} u(y) dy = u(x)|B_\epsilon| + \int_{B_\epsilon(x)} \nabla u(x) \cdot (y-x) dy + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \int_{B_\epsilon(0)} z_i z_j dz + O(\epsilon^3) \quad (19)$$

右辺の第 2 項の積分は 0 となる。さらに第 3 項の積分は $i \neq j$ で 0 になり, 対称性を使い

$$\int_{B_\epsilon(0)} z_i^2 dz = \frac{1}{n} \int |z|^2 dz = \frac{1}{n} \int_0^\epsilon \int_{\partial B_\rho} \rho^2 dS d\rho = \frac{\sigma_{n-1} \epsilon^2}{n(n+2)} \epsilon^n = \frac{\epsilon^{2+n} \omega_n}{(n+2)} \quad (20)$$

よって

$$\frac{1}{|B_\epsilon|} \int_{B_\epsilon(x)} u(y) dy - u(x) = \frac{\epsilon^2}{2(n+2)} \Delta u(x) + O(\epsilon^3)$$

ここで ω_n は \mathbf{R}^n 内の単位球の体積, σ_{n-1} は単位球面の面積を表す。また

$$u(x) - \frac{1}{2} \left\{ \max_{B_\epsilon(x)} u + \min_{B_\epsilon(x)} u \right\} \approx u(x) - \frac{1}{2} \left\{ u \left(x + \epsilon \frac{\nabla u(x)}{|\nabla u(x)|} \right) + u \left(x - \epsilon \frac{\nabla u(x)}{|\nabla u(x)|} \right) \right\} = -\frac{\epsilon^2}{2|\nabla u|^2} \Delta_\infty u(x) + O(\epsilon^3) \quad (21)$$

ここで最後の等式はテイラー展開を使った。(19)式と(21)式から(16)式を得る。これらを粘性解の状況で行えばよい。

証明 : $x \in \Omega$ をとり, x の近傍で定義された C^2 関数 ϕ をとる。 x_1^ϵ と x_2^ϵ を ϕ が $\overline{B_\epsilon(x)}$ でそれぞれ最小, 最大をとる点とする。すなわち

$$\phi(x_1^\epsilon) = \min_{y \in \overline{B_\epsilon(x)}} \phi(y), \quad \phi(x_2^\epsilon) = \max_{y \in \overline{B_\epsilon(x)}} \phi(y)$$

x のまわりで ϕ のテイラー展開を考え, $|y-x| \rightarrow 0$ のとき

$$\phi(y) = \phi(x) + \nabla \phi(x) \cdot (y-x) + \frac{1}{2} \langle D^2 \phi(x)(y-x), (y-x) \rangle + O(|y-x|^3)$$

これを $y = x_1^\epsilon$ と $y = 2x - x_1^\epsilon = \bar{x}_1^\epsilon$ として, $\epsilon \rightarrow 0$ のとき

$$\begin{aligned} \phi(x_1^\epsilon) &= \phi + \nabla\phi(x) \cdot (x_1^\epsilon - x) \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle D^2\phi(x)(x_1^\epsilon - x), (x_1^\epsilon - x) \rangle + O(\epsilon^3) \\ \phi(\bar{x}_1^\epsilon) &= \phi - \nabla\phi(x) \cdot (x_1^\epsilon - x) \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle D^2\phi(x)(x_1^\epsilon - x), (x_1^\epsilon - x) \rangle + O(\epsilon^3) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \phi(\bar{x}_1^\epsilon) + \phi(x_1^\epsilon) - 2\phi(x) \\ = \langle D^2\phi(x)(x_1^\epsilon - x), (x_1^\epsilon - x) \rangle + O(\epsilon^3). \end{aligned}$$

x_1^ϵ は ϕ の最小の点なので、

$$\begin{aligned} \phi(\bar{x}_1^\epsilon) + \phi(x_1^\epsilon) - 2\phi(x) \\ \leq \max_{y \in \bar{B}_\epsilon(x)} \phi(y) + \min_{y \in \bar{B}_\epsilon(x)} \phi(y) - 2\phi(x). \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \{ \max_{y \in \bar{B}_\epsilon(x)} \phi(y) + \min_{y \in \bar{B}_\epsilon(x)} \phi(y) \} - \phi(x) \\ \geq \frac{1}{2} \langle D^2\phi(x)(x_1^\epsilon - x), (x_1^\epsilon - x) \rangle + O(\epsilon^3). \quad (22) \end{aligned}$$

同じ操作を x_2^ϵ に対しても行い次を得る。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \{ \max_{y \in \bar{B}_\epsilon(x)} \phi(y) + \min_{y \in \bar{B}_\epsilon(x)} \phi(y) \} - \phi(x) \\ \leq \frac{1}{2} \langle D^2\phi(x)(x_2^\epsilon - x), (x_2^\epsilon - x) \rangle + O(\epsilon^3). \quad (23) \end{aligned}$$

直観的説明で u に対し行ったことを ϕ に対し行い

$$\begin{aligned} \frac{1}{|B_\epsilon(x)|} \int_{B_\epsilon(x)} \phi(y) dy - \phi(x) \\ = \frac{\epsilon^2}{2(n+2)} \Delta\phi(x) + O(\epsilon^3). \quad (24) \end{aligned}$$

(22)に α , (24)に β をかけて加えると、任意の滑らかな ϕ に対し

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} \left(\max_{y \in \bar{B}_\epsilon(x)} \phi(y) + \min_{y \in \bar{B}_\epsilon(x)} \phi(y) \right) \\ + \frac{\beta}{|B_\epsilon(x)|} \int_{B_\epsilon(x)} \phi(y) dy - \phi(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \geq \frac{\beta\epsilon^2}{2(n+2)} \left((p-2) \langle D^2\phi(x) \left(\frac{x_1^\epsilon - x}{\epsilon} \right), \right. \\ \left. \left(\frac{x_1^\epsilon - x}{\epsilon} \right) \right) + \Delta\phi(x) \Big) + O(\epsilon^3). \quad (25) \end{aligned}$$

Remark : 十分小さな ϵ に対し $\nabla\phi(x) \neq 0$ のとき $x_1^\epsilon \in \partial B_\epsilon(x)$ 。実際もしそうでなければ、 ϕ の最小の部分列 $x_1^{\epsilon_j}$ が存在する。このとき $\nabla\phi(x_1^{\epsilon_j}) = 0$ 、そして $\epsilon_j \rightarrow 0$ のとき $x_1^{\epsilon_j} \rightarrow x$ なので連続性より $\nabla\phi(x) = 0$ を得、矛盾。また

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x_1^\epsilon - x}{\epsilon} = - \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}(x). \quad (26)$$

さて今 u が定義2の意味で粘性解とする。さらに定義2の(1)の状況を考える (粘性優解)。すなわち $u - \phi$ が x で真の最小をもつ (もし $p = \infty$ ならば $\phi \in S(x)$) 滑らかな関数 ϕ を考える。ここで $S(x)$ は C^2 関数で $\nabla\phi(x) \neq 0$ かまたは、 $\nabla\phi(x) = 0$ でかつ極限

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{2(\phi(y) - \phi(x))}{|y-x|^2} = \Delta_\infty\phi(x)$$

が存在するような空間とする。このとき(17)式, (25)式より

$$\begin{aligned} 0 \geq \frac{\beta\epsilon^2}{2(n+2)} \left((p-2) \langle D^2\phi(x) \left(\frac{x_1^\epsilon - x}{\epsilon} \right), \right. \\ \left. \left(\frac{x_1^\epsilon - x}{\epsilon} \right) \right) + \Delta\phi(x) \Big) + O(\epsilon^3). \end{aligned}$$

もし $\nabla\phi(x) \neq 0$ ならば $\epsilon \rightarrow 0$ として次を得る。

$$0 \geq \frac{\beta\epsilon^2}{2(n+2)} ((p-2) \Delta_\infty\phi(x) + \Delta\phi(x)).$$

これは $1 < p < \infty$ のとき定義3の(1)を意味している。 $p = \infty$ のとき

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{\phi(y) - \phi(x)}{|y-x|^2} = L$$

が存在するとする。

$$0 \geq \frac{1}{2} \left\{ \max_{\overline{B}_\epsilon(x)} \phi + \min_{\overline{B}_\epsilon(x)} \phi \right\} - \phi(x)$$

から $L \leq 0$ を導く必要がある。矛盾により導く。今 $L > 0$ として十分小さな $\eta > 0$ をとり $L - \eta > 0$ とする。極限の条件から十分小さな $|x - y|$ に対し

$$(L - \eta) |x - y|^2 \leq \phi(x) - \phi(y) \leq (L + \eta) |x - y|^2.$$

よって

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{1}{2} \max_{\overline{B}_\epsilon(x)} (\phi - \phi(x)) + \frac{1}{2} \min_{\overline{B}_\epsilon(x)} (\phi - \phi(x)) \\ &\geq \frac{1}{2} \max_{\overline{B}_\epsilon(x)} (\phi - \phi(x)) \\ &\geq \left(\frac{L - \eta}{2}\right) \epsilon^2 \end{aligned} \tag{27}$$

これは矛盾。よって $L \leq 0$ が言えた。粘性劣解の時も同様に示すことができる。次は定理の逆の主張を示す。すなわち定義 3 の意味の粘性解から定義 2 の粘性解を示す。いま定義 3 の(2)を満たす ϕ をとる。($u - \phi$ が $x \in \Omega$ で最大をとるとする。) もし $\nabla \phi(x) \neq 0$ なら、

$$-(p - 2) \Delta_\infty \phi(x) - \Delta \phi(x) \leq 0 \tag{28}$$

となりこれから、次を示せばよい。

$$\begin{aligned} \liminf_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\epsilon^2} \left(-\phi(x) + \frac{\alpha}{2} \left\{ \max_{\overline{B}_\epsilon(x)} u + \min_{\overline{B}_\epsilon(x)} u \right\} \right. \\ \left. + \frac{\beta}{|B_\epsilon|} \int_{B_\epsilon(x)} u(y) dy \right) \geq 0 \end{aligned}$$

実際、(25)式を ϵ^2 で割り、(26)を使い(28)から目的の式を得る。 $\nabla \phi(x) = 0$ で $p = \infty$ のときは

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{\phi(y) - \phi(x)}{|y - x|^2} = L \geq 0$$

の存在を仮定し、

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\epsilon^2} \left(-\phi(x) + \frac{1}{2} \left\{ \max_{\overline{B}_\epsilon(x)} \phi + \min_{\overline{B}_\epsilon(x)} \phi \right\} \right) \geq 0$$

粘性劣解のときも同様に示す。 $1 < p < 2$ の場合 $\alpha \leq 0$ より、 x_1^ϵ に対する(22)の代わりに x_2^ϵ に対する(23)を使って同様に行う。

4 $p = \infty$ の場合

前節でも $p = \infty$ の場合を含んで、考えていたが、ここで $p = \infty$ のときを分けて整理する。Peres, Schramm, Sheffield, Wilson [6] は tug-of-war game と呼ばれる微分ゲームと ∞ -Laplacian の関係を最初に導入した。(X, d) を距離空間とする。 $Y \subset X$ に対し、リプシッツ関数 $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ が与えられる。 $E_\epsilon = \{x \sim y : d(x, y) < \epsilon\}$ を辺集合とする。 u^ϵ を端利得 F をもち、 E^ϵ 上でプレイされたゲームの値とする。言い換えると $u^\epsilon(x)$ は次の 2 人ゼロ和ゲーム： ϵ -tug-of-war game の値である。 $x_0 = x \in X \setminus Y$ を固定する。 k 番目でプレイヤーはコインを投げる。勝者は $d(x_k, x_{k-1}) < \epsilon$ となる x_k を選ぶ。ゲームは $x_k \in Y$ で終了し、プレイヤー 1 の利得は $F(x_k)$ となる。 $u := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u^\epsilon$ が各点で存在するなら、 u を (X, d, Y, F) の連続値と呼ぶ。

いま、 X を \mathbf{R}^n の有界開集合 Ω とし、 $F : \partial \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ を一様連続とする。このとき u は次の方程式の一意の連続な粘性解が存在する。

$$\frac{\Delta_\infty u}{|Du|^2} = 0 \text{ in } \Omega, \tag{29}$$

$$u|_{\partial \Omega} = F \tag{30}$$

$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u^\epsilon = u$ は tug-of-war game on $(\overline{\Omega}, d, \partial \Omega, F)$ の連続値である。

これは $B(x, \epsilon)$ 上でのゲームを考え、 u^ϵ を期待値とする時、次式

$$u^\epsilon(x) = \frac{1}{2} \left(\max_{\partial B(x, \epsilon)} u^\epsilon + \min_{\partial B(x, \epsilon)} u^\epsilon \right) \tag{31}$$

は(3)を

から導かれる。もし $Du^\epsilon(x) \neq 0$ なら

$$\begin{aligned} \max_{\partial B(x, \epsilon)} u^\epsilon &\approx u^\epsilon \left(x + \frac{\epsilon Du^\epsilon}{|Du^\epsilon(x)|} \right) \\ \min_{\partial B(x, \epsilon)} u^\epsilon &\approx u^\epsilon \left(x - \frac{\epsilon Du^\epsilon}{|Du^\epsilon(x)|} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

これらを上式に代入して ϵ^2 で割って

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon^2} \left(u^\epsilon \left(x + \frac{\epsilon Du^\epsilon}{|Du^\epsilon(x)|} \right) \right. \\ \left. + u^\epsilon \left(x - \frac{\epsilon Du^\epsilon}{|Du^\epsilon(x)|} \right) - 2u^\epsilon(x) \right) \approx 0 \end{aligned} \quad (33)$$

テイラー展開により左辺は

$$\frac{1}{|Du^\epsilon|^2} (D^2 u^\epsilon \cdot Du^\epsilon, Du^\epsilon) = \frac{1}{|Du^\epsilon|^2} \Delta_\infty u^\epsilon \approx 0$$

となり、ここで $\epsilon \rightarrow 0$ とすれば(29)を得る。

5 付録

ここでマルチンゲールの定義と任意停止定理を述べておく。

定義 4 : (X, F, P) を確率空間とし、確率変数の列

$$\{M_k(\omega)\}_{k=1}^\infty, \omega \in X$$

が sub- σ field $F_k \subset F, k=1, 2, \dots$ に関してマルチンゲールであるとは、次の条件が成り立つことである。

- (1)各確率変数 M_k は対応する σ -field F_k に関して可測であり、 $\mathbb{E}(|M_k|) < \infty$.
- (2) σ -field は増大列である。すなわち $F_k \subset F_{k+1}$.
- (3)各確率変数に対して

$$\mathbb{E}[M_k | F_{k-1}] = M_{k-1} \text{ almost surely w.r.t. } P$$

さらに確率変数の列が優マルチンゲールであると

$$\mathbb{E}[M_k | F_{k-1}] \leq M_{k-1} \text{ almost surely w.r.t. } P$$

とする。また劣マルチンゲールは(3)を

$$\mathbb{E}[M_k | F_{k-1}] \geq M_{k-1} \text{ almost surely w.r.t. } P$$

次に任意停止定理を述べる。

定理 : $\{M_k\}_{k=1}^\infty$ をマルチンゲール、 τ を有界な停止時刻とする。この時

$$\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0].$$

さらに優マルチンゲールに対しては

$$\mathbb{E}[M_\tau] \leq \mathbb{E}[M_0].$$

劣マルチンゲールに対しては

$$\mathbb{E}[M_\tau] \geq \mathbb{E}[M_0].$$

参考文献

- [1] Evans, C., The 1-Laplacian, the ∞ -Laplacian and differential games, *Contemp. Math.* 446 (2007) 245-254.
- [2] Manfredi, J. J., Parviainen, Rossi, J. D., An Asymptotic mean value characterization for p-harmonic functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 138 (2010) 881-889. (8)
- [3] Manfredi, J. J., Parviainen, Rossi, J. D., An asymptotic mean value characterization for a class of nonlinear parabolic equations related to tug-of war games, *SIAM J. Math. Anal.* 42, No 5, (2010) 2058-2081. (8)
- [4] Manfredi, J. J., Parviainen, Rossi, J. D., On the definition and properties of p-harmonious functions, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze.* vol. XI (2), (2012) 215-241. (8)
- [5] Manfredi, J. J., Parviainen, Rossi, J. D., Dynamic programming principle for tug-of-war games with noise, preprint
- [6] Peres, Y., Schramm, O., Sheffield, S., Wilson, D., Tug-of-war and the infinity Laplacian, *J. Am. Math. Soc.* 22 (1), (2009) 167-210.

- [7] Rossi, J. D., Tug-of-war games that PDE peoples like to play, note, <http://mate.dm.uba/~jrossi>